Bài báo cáo này sẽ trình bày về cách Newton xây dựng công thức trong một dạng khác cho trường hợp các mốc nội suy xi có khoảng cách đều nhau : h = xi+1 – xi .

**Mục lục:**

1.Nhắc lại về đa thức nội suy ………………………………………………..............................1

2. Sai phân hữu hạn……….…………………………………………………………………………………2

3. Bảng sai phân hữu hạn…………………………………………..…………………………………… 8

4. Liên hệ giữa sai phân và tỷ hiệu …………………………………………………………………..9

5. Đa thức nội suy Newton (có môc cách đều) ………………………………………………..9

6. Sai số của đa thức nội suy Newton có mốc cách đều ………………………………….11

7. Một số áp dụng sai phân và đa thức nội suy………………………………………………. 12

**1.Nhắc lại về đa thức nội suy**

Trong thực tế ta thường gặp các hàm số y = f(x) msf không biết biểu thức giải tích cụ thể của chúng. Thông thường bằng đo đạc, thực nghiệm, ta cchỉ thu được trong dạng một bảng số, nghĩa là biết giá trị yi  tại các điểm xi tương ứng ( ) thuộc đoạn [a;b] nào đó. Trong khi ta muoón biết giá trị của y tại điểm . Cũng có trường hợp ta biết được quy luật biến đổi y=f(x) nhưng f(x) có dạng phức tạp thì giá trị cũng khó mà tính được. Vì vậy người ta tìm cách thay hàm f(x) bằng một hàm F(x) đơn giản hơn để khi tính tại f() và F( là không đáng kể. Việc thay f(x) bằng F(x) gọi là xấp xỉ hàm. Thường F(x) được chọn là đa thức và gọi là đa thức nội suy.

**1.1.Bài toán**

Giả thiết: Cho hàm số f(x) trên đoạn [a;b]. Bằng cách nào đo ta thu được bảng số

yi=f(xi), ,h=xi+1 – xi, xi (\*1)

Từ bảng số trên, xây dựng đa thức Pn(x) bậc sao cho

Đa thức sinh ra từ bảng số (\*1) và thỏa mãn điều kiện (\*2) gọi là đa thức nội suy. Các điểm xi gọi là các mốc nội suy; đồng thời Pn(x) trên đoạn [a;b]

Hiệu số: (\*3)

Gọi là sai số của phép tính nội suy tại điểm .

**1.2.Sự duy nhất của đa thức nội suy**

**Định lý 1**: Đa thức Pn(x) (bậc sinh ra từ bảng số (\*1) thỏa mãn điều kiện (\*2) là duy nhất.

**Chứng minh**:

Giả sử từ bảng số (\*1) sinh ra hai đa thức nội suy Pn(x) và Qn(x) cùng thỏa mãn điều kiện (\*2), nghĩa là:

Xét hiệu H(x) = Pn(x) - Qn(x) thì H(x) cũng là một đa thức bậc , đồng thời:

Như vậy đa thức H(x) có bậc có tới n+1 nghiệm là x0,x1,…, xn thì H(x) trên [x0;xn] hay Pn(x)=Qn(x).

**2. SAI PHÂN HỮU HẠN (HIỆU HỮU HẠN)**

**2.1. Sai phân tiến**

Ta gọi : ) là sai phân tiến cấp một

Sai phân tiến của sai phân tiến cấp một gọi là sai phân tiến cấp hai và kí hiệu bởi:

Tổng quát sai phân tiến của sai phân tiến cấp k-1 được gọi là sai phân tiến cấp k, ký hiệu:

**2.2. Sai phân lùi**

Ta gọi là sai phân lùi cấp một

Sai phân lùi của sai phân lùi cấp k-1 gọi là sai phân lùi cấp k và được tính theo công thức:

Từ khái niệm sai phân tiến và lùi, ta có mối liên hệ giữa chúng:

Ta xem và xem ∆ là toán tử tác động lên hàm f tại mốc x

Ký hiệu là số gia của đối số (là số cố định) và gọi là bước

Biểu thức: (1)

gọi là sai phân cấp một của hàm số f(x) tại điểm x.

Sai phân của sai phân cấp một được gọi là sai phân cấp hai, ký hiệu:

Sai phân của sai phân cấp m-1 là sai phân cấp m, ký hiệu

**Toán tử ∆ có các tính chất sau:**

**Tính chất 1**: ∆ là toán tử tuyến tính:



Chứng minh:

* Chứng minh:

Giả sử: đúng với m

Cần chứng minh: đúng với n = m + 1

Thật vậy, =

⇒Đpcm

⇒

Giả sử : đẳng thức đúng với n

Cần chứng minh đẳng thức đúng với n+1 :

VT =

=

= (n+1).h.n!hn = VP

⇒ Đpcm

**Tính chất 2**: giá trị của hàm f(x) được biểu diễn qua sai phân các cấp của nó

(2)

Trong đó

Chứng minh:

Từ (1) ta có

Do xem ∆ là toán tử, 1 là toán tử đơn vị nên

Truy hồi ta có

Vậy : m= 1,2,… (3)

Khai triển theo nhị thức Newton ta thu được công thức (2)

**Tính chất 3**: Sai phân hữu hạn cấp m của hàm f(x) được biểu diễn qua các giá trị liên tiếp của nó

(4)

Chứng minh:

Do

(Áp dụng công thức (3))

**Tính chất 4**: Giả sử f(x) có đạo hàm liên tục đến cấp m trên đoạn [x;x+mh] thì ta có

(5)

Trong đó

Chứng minh: ta sẽ chứng minh công thức (5) bằng phương pháp quy nạp

Khi m=1 ta có đúng (vì đó là công thức số gia giớ nội)

Giả sử (5) đúng với m = k

Ta sẽ chứng minh (5) cũng đúng với m = k + 1

Từ

Áp dụng định lý Lagrange lần nữa cho biểu thức trong ngoặc vuông

Đặt

Nên là điều phải chứng minh

>>> Như vậy các công thức sai phân và tính chất của nó sẽ được sử dụng để xây dựng các đa thức nội suy sau này.

**3. BẢNG SAI PHÂN HỮU HẠN**

Giả sử hàm số y = f(x) được cho trong dạng một bảng số

Như vậy sai phân các cấp được xác định theo công thức

Công thức (6) được mô tả theo bảng tính sau:

|  |  |
| --- | --- |
| x | y ∆y ∆2y ∆3y . . . |
| .  .  . | y0  ∆y0  y1 ∆2y0  ∆y1 ∆3y0 .  y2 ∆2y1 . .  ∆y2 . . ∆ny0  y3  . . . .  . . . ∆3yn-3 .  . . ∆2yn-2  . ∆yn-1  yn |

Từ bảng trên ta thấy, để có sai phân cấp một cần 2 mốc nội suy, sai phân cấp hai cần 3 mốc nội suy,... sai phân cấp n cần n+1 mốc nội suy.

**4. LIÊN HỆ SAI PHÂN VÀ TỶ HIỆU**

Ta có

Từ đó suy ra

**5. ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON (CÓ MỐC CÁCH ĐỀU)**

Ta đã có đa thức **nội suy Newton tiến** xuất phát từ mốc x0 (các mốc được sắp xếp theo thứ tự xi , ).

Đặt

;

...

Từ (7) và (8) suy ra

Công thức (9) gọi là đa thức nội suy Newton tiến có mốc cách đều (xuất phát từ mốc x0 tiến dần lên), hệ số được sử dụng hàng đầu của bảng sai phân.

Xuất phát từ **công thức nội suy Newton lùi** (các mốc được sắp xếp theo thứ tự xi

Đặt x = xn + ht. Tương tự như trên ta được

= (10)

Công thức (11) gọi là đa thức nội suy Newton lùi có mốc cách đều (xuất phát từ nút xn lùi dần lại), hệ số của nó được sử dụng từ hàng cuối cùng của bảng.

**6. SAI SỐ CỦA ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON CÓ MỐC CÁCH ĐỀU**

Là sai số tại điểm x

Để đánh giá sai số ta đặt

Và K được chọn sao cho F(x)=0

Hay

Từ công thức (12), ta có đồng thời

Từ (13) suy ra

Hay pt F(x)=0 có n+2 nghiệm

Theo định lý Roll thì F’(x) =0 có n+1 nghiệm, cứ thế tiếp tục sau n+1 lần thì sẽ có một nghiệm

Hay

Lại do F(x)=0, từ (13) suy ra

Xét với đa thức nôi suy Newton (9). Từ ta được

Và

**7.MỘT SỐ ÁP DỤNG SAI PHÂN VÀ ĐA THỨC NỘI SUY**

Tính giá trị đa thức và đạo hàm tại điểm bất kì.

*Thuật toán:*

Input: % x0 la mốc nội suy đầu tiên

% h la bước

%y la các giá trị của hàm

% a va b la giá trị x yêu cầu tính giá trị đa thức và đạo hàm

Output: % trả về kết quả giá trị đa thức va sai số tại a

% trả về kết quả giá trị đạo hàm tại điểm b

*Code Matlab*:

function N= newtoncachdeu(x0, h, Y, a, b)

% x0 la moc noi suy dau tien % h la buoc % Y la cac gia tri cua ham

% a va b la gia tri x yeu cau tinh gia tri da thuc va dao ham

n=length(Y);

%sau day ta tinh bang sai phan

D= zeros(n-1, n-1);

for i=1:(n-1)

D(i,1)= Y(i+1)-Y(i);

end

for j=2:(n-1)

for i=1:(n-j)

D(i,j)= D(i+1, j-1) -D(i,j-1);

end

end

syms x t real;

s=1;

R=D(1,n-1);

%ta se so sanh xem dung da thuc noi suy tien hay lui

if (a- x0)< (x0 + h\*n - a)

%xay dung da thuc noi suy tien

fprintf('vi %f gan dau bang nen ta se dung da thuc noi suy newton tien \n', a);

y=Y(1);

for i=1:n-1

s = s\*(t-i+1)/i;

y = y + D(1,i)\*s;

end

f=subs(y, t);

%in da thuc dang chinh tac ra man hinh

disp('da thuc noi suy dang chinh tac la');

f=vpa(expand(subs(f,(x-x0)/h)),5)

%xay dung cong thuc tinh sai so

for k=0:n-1

R=R\*(t-i)/(i+1);

end

R=subs(R,(x-x0)/h);

else

% xay dung da thuc noi suy lui

fprintf('vi %f gan cuoi bang nen ta se dung da thuc noi suy newton lui \n', a);

y=Y(n);

for i=1:n-1

s = s \* (t+i-1)/i;

y = y + D(n-i,i)\*s;

end

f=subs(y,t);

%in da thuc dang chinh tac ra man hinh

disp('da thuc noi suy dang chinh tac la');

f=vpa(expand(subs(f,-(x0+(n-1)\*h-x)/h)),5)

% xay dung cong thuc tinh sai so

for k=0:n-1

R=R\*(t+k)/(k+1);

end

R=subs(R,-(x0+(n-1)\*h-x)/h);

end

% tra ve ket qua gia tri da thuc va sai so tai a

fprintf('gia tri tai %f la %f voi sai so khoang %f \n',a,subs(f,a), abs(subs(R,a)));

% su dung ham diff cua Mathlab ho tro viec tinh dao ham

disp('dao ham bac nhat la');

g= diff(f)

% tra ve ket qua gia tri dao ham tai diem b

fprintf('gia tri cua dao ham bac nhat tai %f la %f', b, subs(eval(g),b));

end

*Ví dụ chạy thử:*

Cho bảng số:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 6.3 | 6.72 | 7.14 | 7.56 | 7.98 | 8.4 |
| y=ex | 21.4295 | 23.377 | 25.3622 | 27.3831 | 29.438 | 31.5253 |

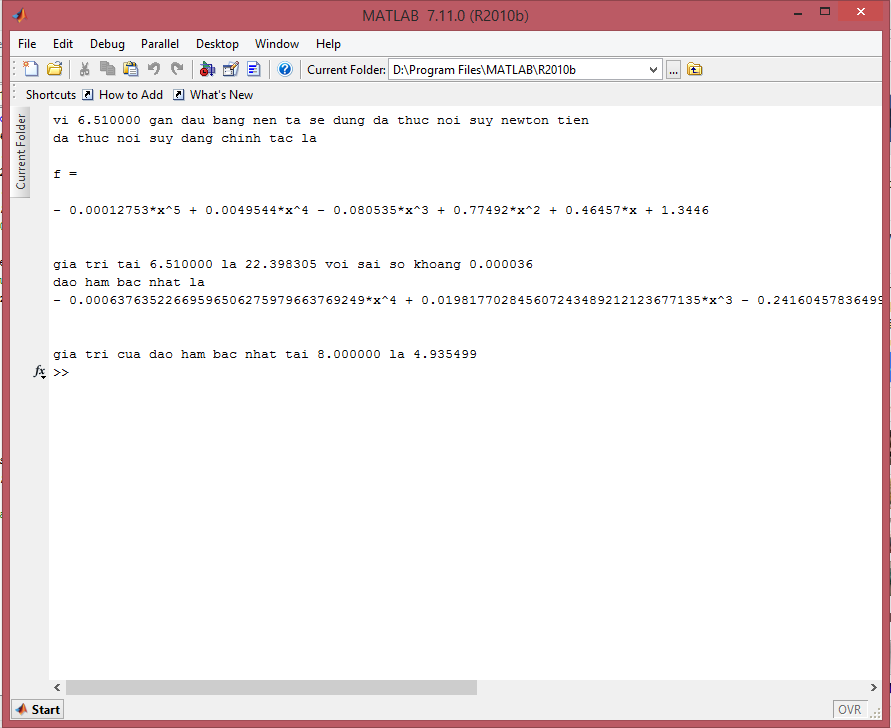
h=0.42

x0=6.3

Y=[21.4295 23.377 25.3622 27.3831 29.438 31.5253]

a=6.51

b=8

Kết quả thu được:

Về mặt định tính, số phép toán thực hiện khi sử dụng đa thức nội suy Newton tiến hay lùi để tính giá trị gần đúng của ) tại là bằng nhau.